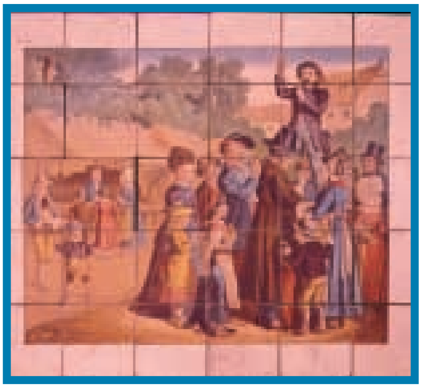


J.L. Charmet

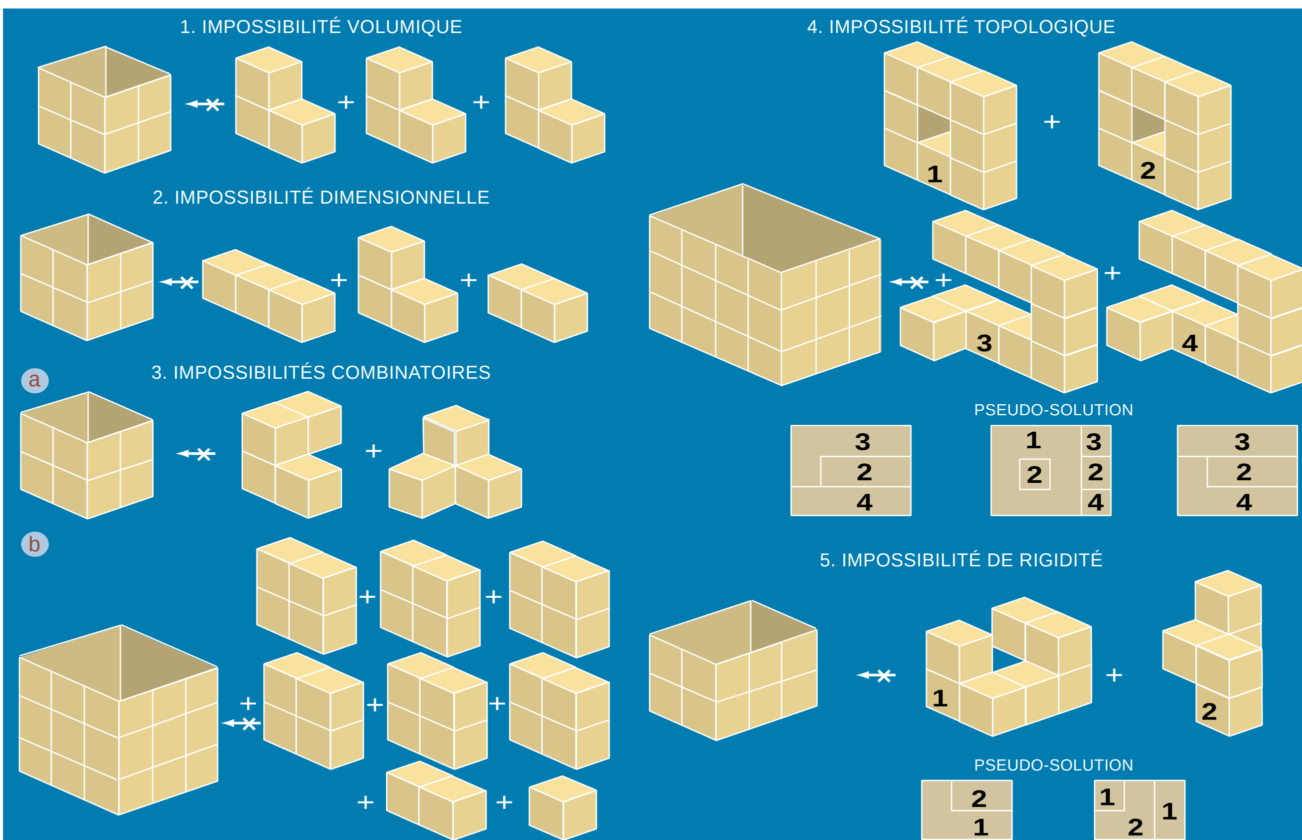
Le rangement de la boîte de cubes

JEAN-PAUL DELAHAYE

Parfois l'exploration aléatoire est la meilleure méthode, parfois il vaut mieux raisonner.

Ranger une boîte n'est pas toujours facile. Évidemment, on ne réussira pas si l'on veut mettre des objets dont le volume est au total supérieur à celui de la boîte (impossibilité volumique). Si le volume total est égal ou inférieur à celui de la boîte, d'autres impossibilités de rangement apparaissent : impossibilité dimensionnelle, impossibilité combinatoire, impossibilité topologique, impossibilité de rigidité *(voir la figure 1)*. Lorsque le rangement est possible, il peut être facile : un enfant de cinq ans sait ranger 8 cubes de côté 1 dans un cube de côté 2. D'autres rangements sont très difficiles et constituent une multitude de casse-tête dont, année après année, les amateurs ont perfectionné les formes pour aboutir aux merveilles d'ingéniosité que nous allons présenter.

Sauf dans le dernier exemple, nous nous limiterons aux problèmes du rangement des polycubes (des formes composées de plusieurs cubes collés face contre face) dans des boîtes parallélépipédiques, car ces problèmes concentrent simplicité, esthétique et facilité de construction : en quelques secondes, vous fabriquerez votre propre casse-tête à l'aide de cubes volés à vos enfants et d'une bonne colle à bois. Si vous n'avez pas de cubes de construction, procurez-vous des perles cubiques, plus petites, qui vous éviteront



1. Cinq impossibilités de rangement. (1) Impossibilité volumique, le volume total des pièces est supérieur à celui de la boîte. (2) Impossibilité dimensionnelle : la taille d'une pièce fait qu'elle ne rentre pas dans la boîte. (3) Impossibilité combinatoire : le volume convient et chaque pièce entre dans la boîte, mais les pièces ne peuvent se trouver toutes ensemble dans la boîte. L'exemple (3a) illustre cette impossibilité, l'exemple (3b) est plus subtil : chacun des 3 plans horizontaux et des 6 plans verticaux composés de 9 cubes chacun doit contenir au moins un cube pris dans les deux petites pièces (car chacune des 6 pièces composées de 4 cubes occupe un nombre pair de cubes de chacun des 9 plans, et il est impossible de placer les deux petites pièces pour qu'elles passent par les 9 plans. (4) Impossibilité topologique : certaines pièces devraient passer à travers d'autres. (5) Impossibilité de rigidité : les pièces devraient être en caoutchouc.

d'entreposer des puzzles encombrants dans des armoires toujours trop pleines et sources de conflits matrimoniaux.

Notons que le problème du remplissage d'un parallélépipède par des polycubes est un «problème NP-complet». Cela signifie qu'on ne connaît aucune méthode algorithmique rapide pour le résoudre systématiquement et qu'on pense (sans toutefois l'avoir prouvé) qu'aucune méthode rapide n'existe. Ce résultat de théorie de la complexité explique en partie la difficulté des problèmes de rangement : il n'interdit pas de programmer des ordinateurs pour chercher les solutions aux problèmes de rangement, il indique seulement que les temps de calcul pourront être très longs.

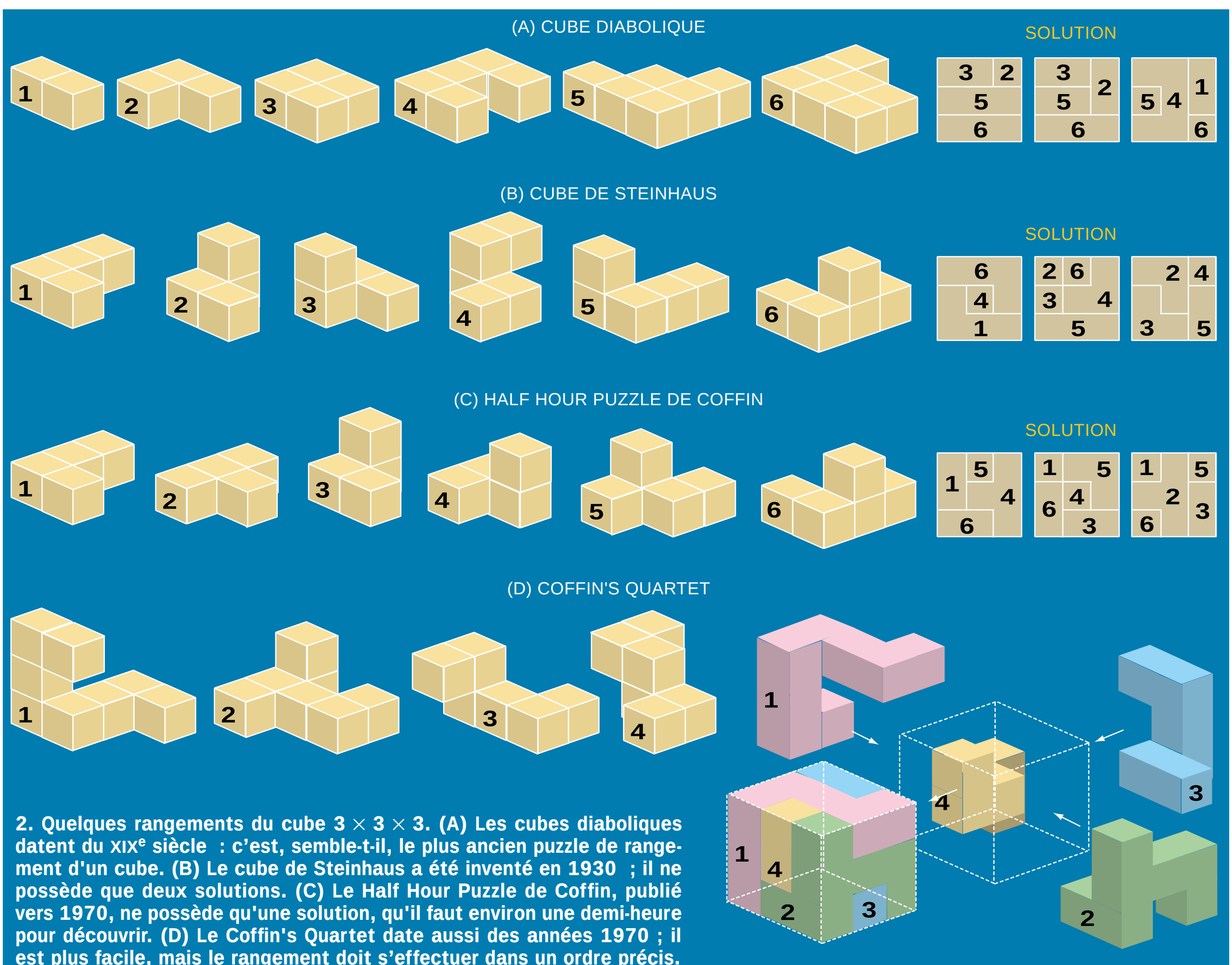
LA VIEILLE BOÎTE DES COLLECTIONNEURS

La «boîte des cubes diaboliques» est le plus ancien casse-tête de cette catégorie. Elle était connue au siècle dernier et est le seul casse-tête de ce type à être mentionné dans le célèbre livre du professeur Hoffmann – un avocat britannique dont le vrai nom était Angelo John Davis. Ce livre se voulait un traité exhaustif des casse-tête mécaniques de son époque. Il a été publié en 1893 sous le titre *Puzzles Old and New* et a été récemment réédité par L.E. Hordern. La nouvelle édition est agrémentée de photos des objets décrits qui ont été retrouvés chez les collectionneurs de casse-tête anciens. Tous les amateurs de casse-tête auront à cœur de se procurer ce magnifique livre (l'adresse de l'éditeur est : L.E. Hordern, Cane End House, Cane End, RG4 9HH, Angleterre).

Une des pièces des cubes diaboliques est composée de deux cubes accolés, une autre est faite de 3 cubes, une de 4, une de 5, une de 6, et une de 7, ce qui fait un total de 27 cubes correspondant au volume d'un cube de côté 3, qu'il s'agit justement de reconstituer pour pouvoir ranger les pièces dans leur boîte *(voir la figure 2 ci-dessous)*. De difficulté moyenne, ce casse-tête est un bon entraînement avant d'aborder les modèles suivants. L'existence de 13 solutions différentes (dans ces dénombrements, on ne compte qu'une seule fois les solutions qui se déduisent les unes des autres par rotation ou symétrie) explique que moins de 10 minutes suffisent pour découvrir un rangement.

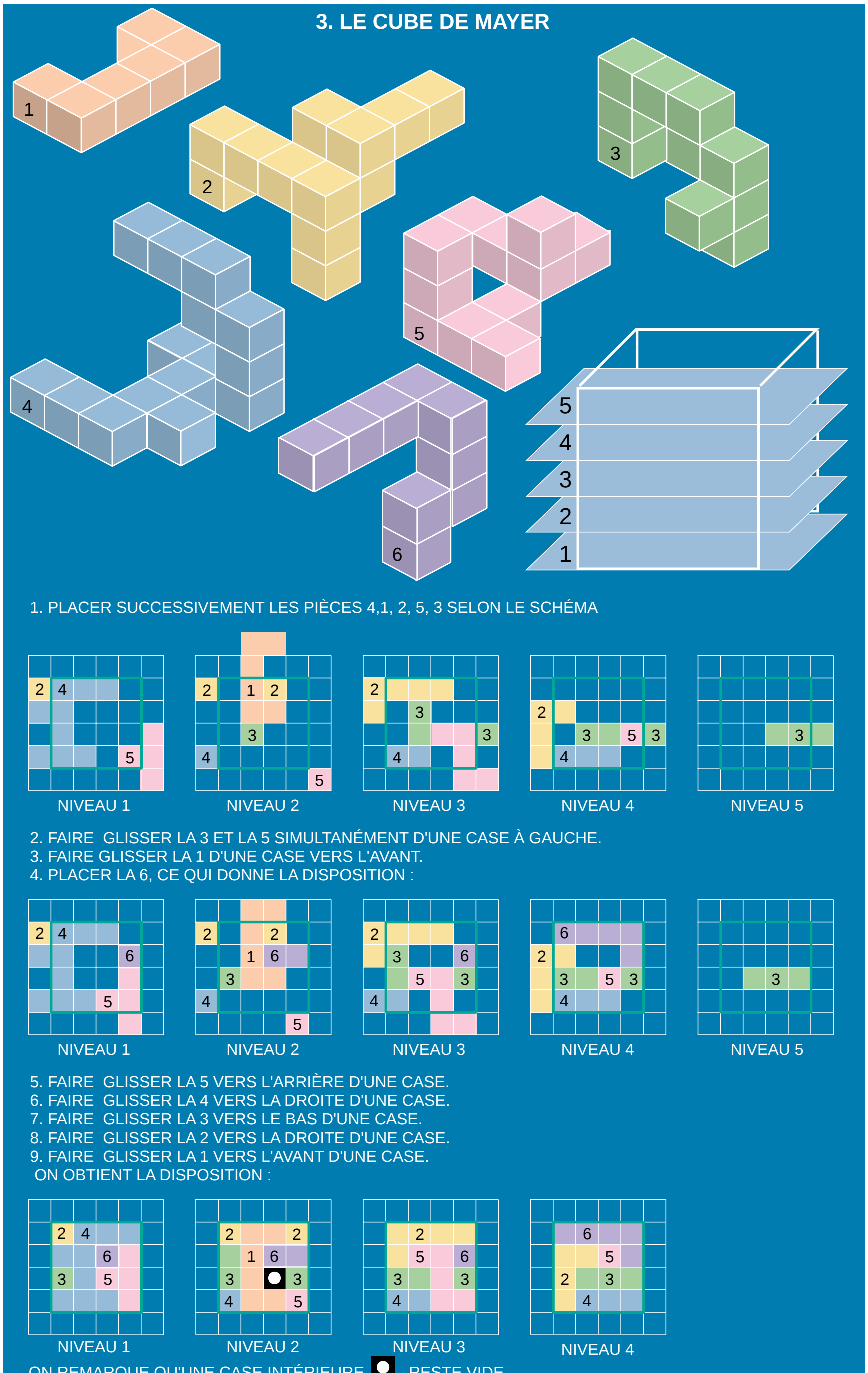
Les décomptes de solutions que nous indiquons dans le cours de cet article ont été faits à l'aide de programmes informatiques et proviennent le plus souvent du livre de Kelvin Holmes (un détective mathématique britannique !) et Rik van Grol, *A Handbook of Cube-Assembly Puzzles Using Polycubes Shapes*, publié à compte d'auteur en 1996. Vous pourrez vous le procurer, comme je l'ai fait, dans la merveilleuse boutique de casse-tête londonienne du marché Camden Lock : Village Games and Puzzles (65 The West Yard, Camden Lock, London, NW1 6HD, Angleterre).

Il semble que, pour aborder les cubes diaboliques, la meilleure méthode soit d'explorer le plus rapidement possible, sans réfléchir, un grand nombre de combinaisons. Si vous n'êtes pas trop maladroit et que, dès qu'une impossibilité apparaît, vous revenez en arrière, vous tomberez sur une des solutions dans un délai court. Un autre principe pour accé-



2. Quelques rangements du cube 3 × 3 × 3. (A) Les cubes diaboliques datent du XIX^e siècle : c'est, semble-t-il, le plus ancien puzzle de rangement d'un cube. (B) Le cube de Steinhaus a été inventé en 1930 ; il ne possède que deux solutions. (C) Le Half Hour Puzzle de Coffin, publié vers 1970, ne possède qu'une solution, qu'il faut environ une demi-heure pour découvrir. (D) Le Coffin's Quartet date aussi des années 1970 ; il est plus facile, mais le rangement doit s'effectuer dans un ordre précis.

lérer la découverte des solutions est de s'occuper en premier des pièces ayant des formes délicates (grosses pièces, pièces non planaires, pièces qui ne peuvent pas se placer dans un coin, etc.). Les programmes pour rechercher des solutions utilisent ces deux principes. Selon la finesse des méthodes de détection de situations bloquées, la recherche est plus ou moins rapide. Ainsi l'ajout d'une seule idée simple (par exemple, la prise en compte des pièces planaires) peut multiplier l'efficacité du programme par 10 ou par 100 : un problème NP-complet oblige le programmeur à être intelligent.



3. Le cube de Derek Mayer. En raisonnant avec un crayon et un schéma du cube de côté 4 décomposé par niveau, on voit que la pièce 4 qui occupe trois coins ne peut (aux symétries près) se placer que d'une seule façon. La pièce 2 ne peut alors être placée que de deux façons différentes dont l'une s'élimine en considérant la pièce 3. Une fois les pièces 2, 4 et 3 en bonne position, le reste suit et l'on obtient ainsi une solution... sur le papier. Toute la difficulté, et elle n'est pas mince, est de trouver les manipulations qui mettront les pièces conformément au schéma théorique. N'est-on pas dans un cas d'impossibilité topologique ou de rigidité ? Non, comme l'indique la suite d'opérations ici décrites.

STEINHAUS ET COFFIN

Un peu plus difficile, le cube de Steinhaus a été inventé, dans les années 1930, par le mathématicien polonais Hugo Steinhaus et fut présenté dans son beau livre de divertissements mathématiques *Mathematical Snapshots* (Oxford University Press, 1950). Vous résoudrez ce problème par la technique de l'exploration aléatoire, mais il vous faudra un peu plus de temps (ou un peu de chance). Il ne possède que deux solutions.

Dans les années 1970, deux autres découpages remarquables du cube de côté 3 en polycubes ont été inventés. Ils sont dus tous les deux au plus ingénieux inventeur de casse-tête de rangement de notre époque : Stewart Coffin. Celui-ci vit dans le Massachusetts, aux États-Unis, où il conçoit et fabrique ses casse-tête en utilisant toutes sortes de bois précieux qu'il ajuste au dixième de millimètre, obtenant des formes géométriques très belles et farcies de difficultés : nulle part ailleurs mathématiques et art ne se sont si intimement associés que dans les créations de cet artisan unique.

Le premier rangement du cube de côté 3 proposé par Coffin est dénommé *Half Hour Puzzle*, car, bien que composé de six pièces seulement, sa résolution demande environ une demi-heure, même à un habitué de ces casse-tête. Il ne possède qu'une solution, qu'on ne découvre que difficilement par la méthode d'exploration aléatoire. Aucun raisonnement simple ne semble susceptible d'accélérer la découverte de l'unique solution. J'ignore comment Coffin a conçu son casse-tête, mais je pense qu'il doit être le plus difficile de tous les assemblages de polycubes donnant un cube de côté 3. Lorsqu'il y a moins de pièces, on réussit à raisonner, ce qui conduit à la solution en moins d'un quart d'heure et, lorsqu'il y a plus de pièces, elles sont petites et donc s'agencent assez bien, ce qui mène rapidement à la solution. Quel psychologue fera l'analyse de ce problème, expliquant pourquoi le découpage de Coffin est plus difficile que les autres découpages du cube de côté 3?

Le second rangement de Coffin (appelé *Coffin's Quartet*) est plus facile, mais il est intéressant, car l'utilisation de petits raisonnements («tel cube est nécessairement dans un coin», «telle pièce passe nécessairement par le centre», etc.) conduit rapidement au schéma du puzzle monté. Une fois que l'on a repéré où doivent se placer les pièces, on découvre que le montage est un second puzzle : il faut le réaliser dans un ordre bien précis ; sinon, les pièces se bloquent les unes les autres *(voir la figure 2)*. Ce type de rangements, où la difficulté provient de l'ordre et de la façon dont les pièces doivent être mises en place, est magnifiquement illustré par le cube de Derek Mayer, diffusé par le fabricant anglais *Pentangle* (Pentangle, The Puzzle People, Salisbury Lane, Over Wallop, Hampshire, SO20 8HT, Angleterre). Il s'agit cette fois d'obtenir un cube de coté 4 avec 6 pièces. Une fois les pièces démontées mélangées, une série de raisonnements élémentaires permet de savoir où doivent aboutir les pièces. Réaliser le montage des six pièces reste cependant une épreuve... La figure 3 décrit la solution, dont on voit qu'elle alterne des mises en place de pièces et des glissements minutieux d'une ou de plusieurs pièces. Quand les pièces sont assemblées, elles tiennent solidement, et aucune boîte n'est donc nécessaire pour les ranger. Si vous décidez de réaliser vous-même ce merveilleux casse-tête, il vous faudra le faire très soigneusement, sinon les pièces se bloqueront sans que vous puissiez les assembler.

Je ne crois pas qu'existent des programmes informatiques pour traiter de tels problèmes, dont la difficulté provient non pas de l'emplacement des pièces, mais de la complication du montage.

Les découpages de Conway

Le raisonnement est non seulement utile, mais parfois indispensable. Si vous ne le pratiquez pas, vous risquez d'errer indéfiniment sans réussir à résoudre certains casse-tête astucieusement conçus pour vous faire tourner en rond autour de combinaisons toujours incomplètes.

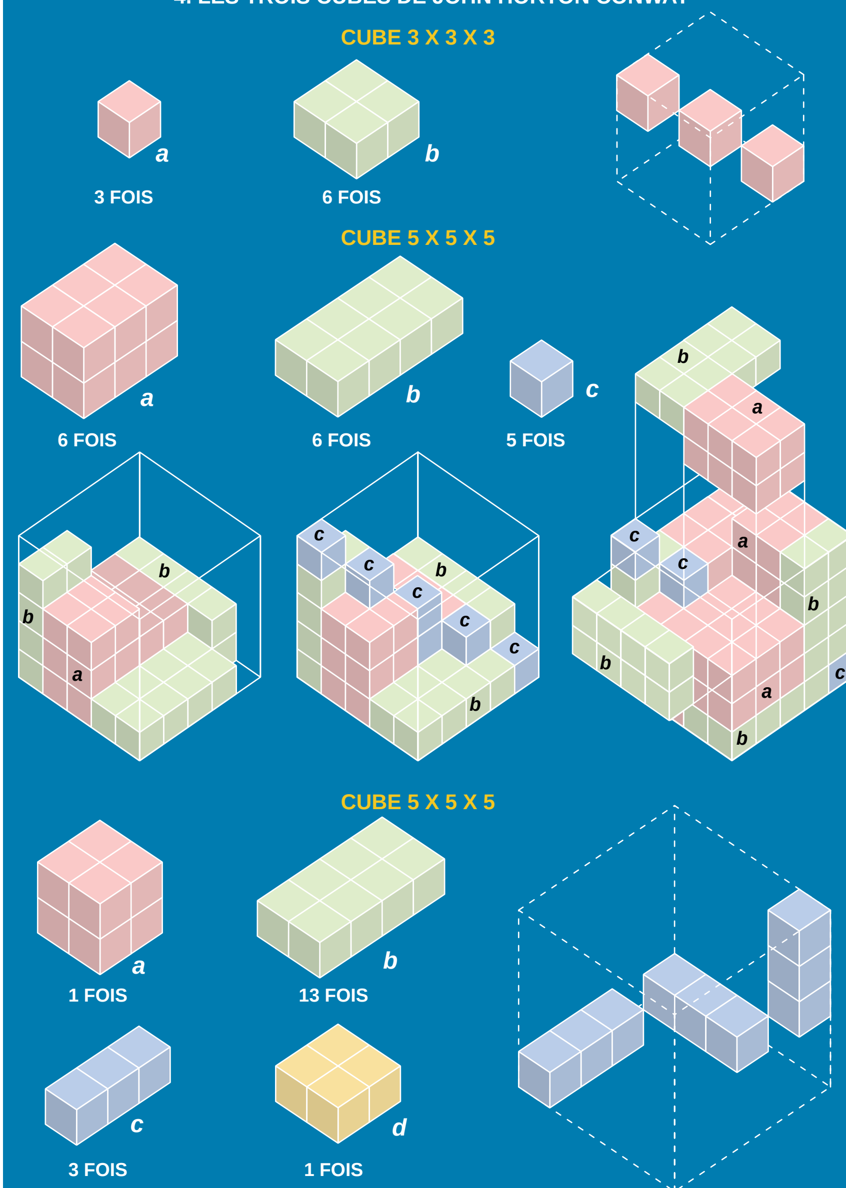
Les trois découpages de John Horton Conway (mathématicien de l'Université de Princeton et inventeur du Jeu de la vie) sont les plus beaux exemples de ces pièges mentaux dont on n'échappe que par le raisonnement. Ces trois casse-tête sont très simples (peu de pièces différentes) et possèdent des solutions très belles, car elles sont symétriques, et on les découvre par des raisonnements astucieux utilisant d'élémentaires remarques de parité *(voir la figure 4)*.

À chaque fois, la propension naturelle que nous avons d'aligner les pièces semblables pour les ranger (ce qui en général est une assez bonne stratégie, car cela réduit les espaces vides) se révèle catastrophique et exactement l'inverse de ce qu'il faut. Le problème 1, malgré son extrême simplicité (six formes de type $2 \times 2 \times 1$ et trois de type $1 \times 1 \times 1$ pour former un cube de côté 3), demandera de longues réflexions. Les plus acharnés des explorateurs aléatoires abandonneront tout espoir de résoudre les deux autres puzzles de Conway : les solutions ne surgissent que d'une réflexion et d'une compréhension profonde des contraintes imposées par certaines pièces. Ces casse-tête sont remarquables : la présence de nombreuses pièces identiques limite le nombre des combinaisons à explorer, mais ne diminue pas la difficulté, ce qui provoque parfois un certain agacement.

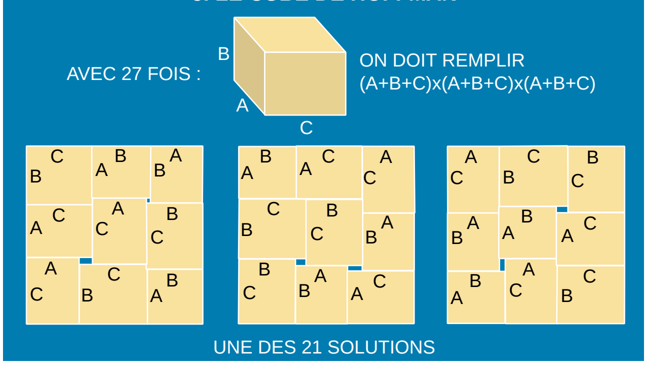
Cube de Dean Hoffman

Le cube de Dean Hoffman (qui n'a rien à voir avec le Hoffmann cité à propos des cubes diaboliques) est une autre merveille de simplicité. Il s'agit de ranger 27 parallélépipèdes identiques de côtés A, B, C

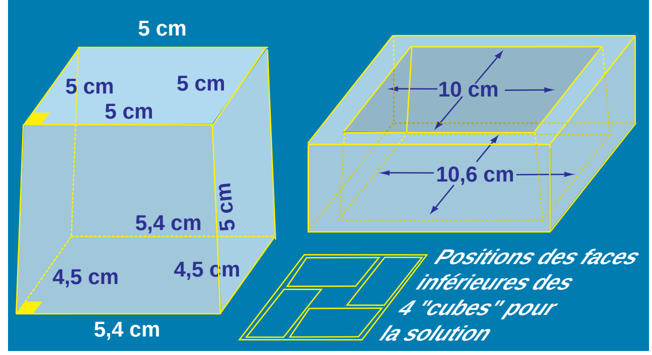
4. LES TROIS CUBES DE JOHN HORTON CONWAY



4. Les trois problèmes de Conway. Le rangement 1 de Conway se traite en raisonnant par parité (comme le cas *3b* d'impossibilité). Chaque plan horizontal ou vertical (il y en a neuf) contient neuf cubes et donc doit contenir au moins l'un des cubes simples (les autres pièces n'interviennent que par multiple de 2 dans un même plan). Il en résulte que deux cubes simples ne seront jamais dans un même plan. Nécessairement l'un des cubes simples est placé au coin de la face supérieure (sinon, on serait obligé de faire intervenir un autre cube simple sur cette face, ce qui est inenvisageable). Même chose pour la face inférieure, où le cube simple placé ne peut l'être que sur le coin opposé à celui où est placé le cube simple de la face supérieure. Le dernier cube simple est alors nécessairement au centre. Le reste suit. Pour le rangement 2 de Conway, on procède encore par le même type de raisonnement de parité qui diminue largement l'espace des possibilités pour le placement des cubes simples. Le tâtonnement conduit alors rapidement à la solution. Des raisonnements faisant intervenir un coloriage en damier de chaque plan du cube permettent d'accélérer la découverte de la solution et de prouver que la solution indiquée est unique (au lecteur le plaisir de les découvrir). Le rangement 3 de Conway se traite de la même façon, mais, contrairement aux deux autres, il possède plusieurs solutions.



5. LE CUBE DE HOFFMAN



6. LES CUBES DE CUTLER

dans un cube de côté A+B+C *(voir la figure 5)*. L'inégalité classique, vérifiée pour tout triplet de nombres positifs A B C, 27ABC < $(A+B+C)^3$, assure que le volume de la boîte est suffisant. Il faut aussi que le plus petit des trois nombres A, B, C soit supérieur à (A + B + C)/4. On pourra prendre A = 4, B = 5, C = 6. Le casse-tête possède 21 solutions, mais aucune n'est facile à découvrir.

Le cube de Soma

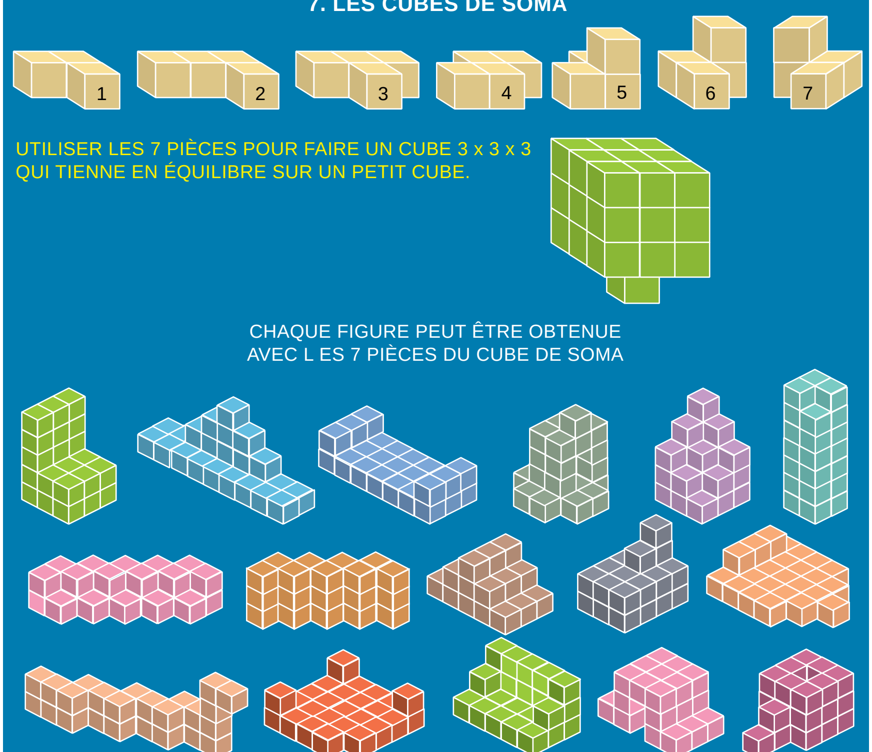
Plus ludiques, certains ensembles de polycubes peuvent non seulement s'assembler en cubes (pour ranger le jeu dans la boîte), mais autorisent de nombreuses formes tridimensionnelles qui sont autant de casse-tête pour l'amateur.

Le cube de Soma fut inventé par l'écrivain danois Piet Hein, alors qu'il assistait à une conférence sur la physique quantique présentée par Werner Heisenberg. Entendant Heisenberg traiter d'espaces mathématiques complexes, il eut l'intuition, après quelques griffonnages sur un morceau de papier, qu'en prenant toutes les formes possibles composées de trois ou quatre cubes accolés par leurs faces et ne se réduisant pas à un parallélépipède (appelons-les «polycubes complexes de taille inférieure à 5») il obtiendrait un ensemble de pièces qui pourrait se combiner en un cube. Son intuition était 240 fois bonne : il y a 240 façons différentes d'assembler les 7 polycubes complexes de taille inférieure à 5.

Le nom «cube de Soma» est une réminiscence du roman de Huxley *Le meilleur des mondes,* où une drogue dénommée Soma plonge ses utilisateurs dans un état d'oubli du monde extérieur qui sera le vôtre si vous pratiquez ce jeu. Il est relativement facile de trouver un rangement du cube de Soma, car il existe un grand nombre de solutions (vous devez réussir en moins de 10 minutes). Un problème ardu est de trouver un assemblage en cube de côté 3 qui tienne en équilibre sur un petit cube supplémentaire placé sous le cube central de la face inférieure du puzzle assemblé. Il existe au moins deux solutions.

Sur la figure 6, nous avons indiqué quelques configurations tridimensionnelles réalisables avec les pièces du cube de Soma. Il en existe des dizaines d'autres. Réaliser ces sculptures tridimensionnelles est vraiment très distrayant.

Il est aussi amusant de constater que la manipulation prolongée de ces pièces confère une habileté qui vous donne accès aux solutions plus rapidement que lors des premiers problèmes. C'est là un exemple remarquable de l'adaptabilité de l'esprit humain qui, sans travail conscient et sans efforts particuliers de raisonnement ou de mémorisation, développe des compétences par la simple confrontation prolongée avec un problème. Le jour où nous saurons programmer des machines de telle façon qu'elles disposent de cette capacité d'apprentissage automatique, nous aurons fait un gros progrès vers l'intelligence artificielle.

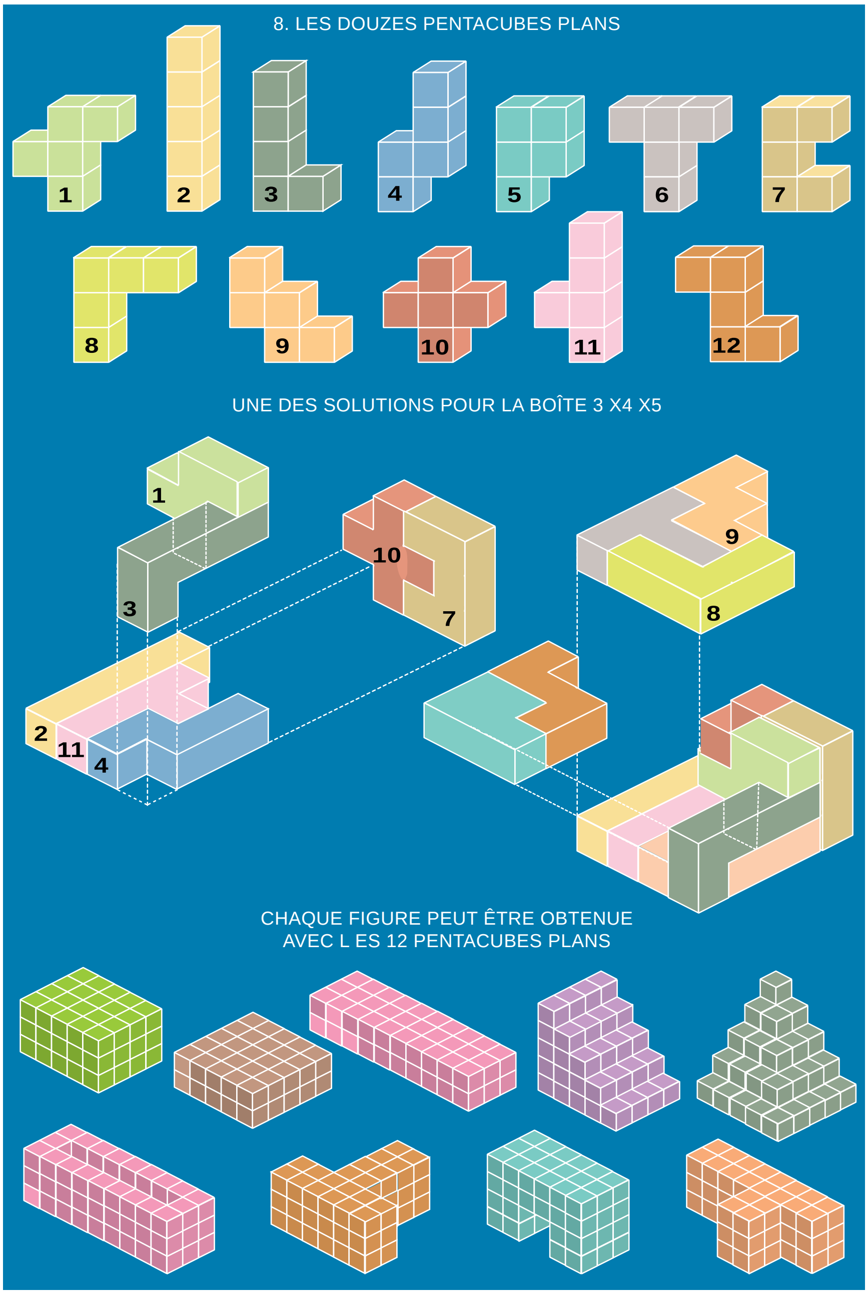


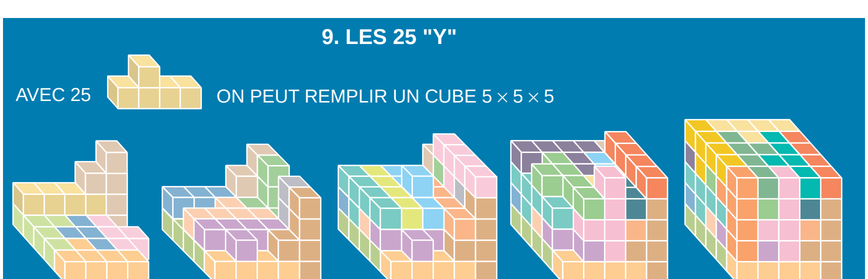
7. LES CUBES DE SOMA

Difficiles pentacubes

Les pentacubes plans (assemblages de 5 cubes tous placés dans un même plan) sont au nombre de 12 (on les obtient en donnant de l'épaisseur aux pentaminos : pièces obtenue en accolant 5 carrés les uns aux autres). Ils possèdent donc au total un volume de 5 × 12 = 60, et il est donc envisageable de les assembler en un parallélépipède de dimension 3 × 4 × 5. C'est effectivement possible... de 3 940 façons différentes ! Comme pour le cube de Soma, on peut construire d'autres formes avec les pentacubes plans *(voir la figure 7)*. Prévenons le lecteur que, malgré le grand nombre de solutions que possède chacun de ces problèmes, aucun n'est facile : imbriquer douze pièces est plus délicat qu'imbriquer 7 pièces. Le cube de Soma, c'est pour les enfants ; les pentacubes plans, pour les adultes !

Une autre illustration de l'idée que l'assemblage d'un cube peut avoir un très grand nombre de solutions sans qu'aucune soit facile à découvrir est le casse-tête des 25 Y. Il s'agit de ranger 25 pentacubes de la forme de l'y (qui ont un volume total de 125) dans une boîte cubique de côté 5 (qui a elle aussi un volume de 125). Il existe des centaines solutions, mais aucune n'est évidente. Un problème encore plus difficile a été résolu sans ordinateur par David Klarner (qui en avait cherché la solution pendant plusieurs années) : le casse-tête des 25 N (on remplace le pentacube Y par le pentacube N). Une étude par programme menée par J. Verhoeff a établi que seules 4 solutions existent, ce qui fait sans doute de ce casse-tête le plus difficile des problèmes cités dans cet article. J'ignore ces quatre solutions, de même que j'ignore les solutions des problèmes de pentacubes que je présente dans la figure 8. Lecteurs, au travail !





Les cubes de Cutler

Pour terminer, voici un problème d'apparence très simple : quatre pièces identiques de forme presque cubique, mais pas tout à fait *(voir la figure 6)*, doivent être rangées dans une boîte d'allure parfaitement anodine. «Cela ne peut pas être difficile», croyez-vous. Pourtant, avec les pièces et la boîte inventées par le mathématicien Bill Cutler, vous changerez d'avis. Vous réussirez à placer sans difficulté une, deux, trois pièces dans la boîte, mais il sera alors impossible d'y faire entrer la quatrième. L'astuce est qu'il faut ranger les pièces en dehors de la boîte (en plaçant la face carrée de chaque pièce au-dessus et les faces rectangulaires au sol selon un schéma symétrique, chaque pièce tournée de 90° par rapport à ses voisines). En saisissant les quatre pièces simultanément, leurs bases se resserrent et elles entrent alors dans la boîte d'un seul coup : on peut placer les quatre pièces ensemble, mais pas les unes après les autres ! Là encore, je doute qu'aucun programme ait jamais été écrit qui traite un tel problème.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université de Lille.

APMEP (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public), *Jeux 3, Jeux pour la tête et les mains*, 1990.

E. BERLEKAMP, J. CONWAY et R. GUY, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, t. II, Ac. Press, Orlando, 1982.

S. COFFIN, *Puzzle Craft*, Trevor Wood T.W. Puzzles (28 Alexandra Crescent, Ilkley, L29, 9ER Angleterre), 1993.

K. HOLMES et R. VAN GROL, *A Handbook of Cube-Assembly Puzzles Using Polycubes Shapes*, pilot edition, 1996.

Pr. HOFFMANN, *Puzzles Old and New*, Freerick Warne and Co, Londres, 1893.

J. SLOCUM et J. BOTERMANS, *Puzzles Old and New. How to Make Them*. University of Washington Press, Seattle, 1994.

P. VAN DELFT et J. BOTERMANS, *Creative Puzzles of the World*, Key Curriculum Press (P.O. Box 2304, Berkeley, CA 94702, États-Unis), 1995.